MA1 – přednáška 9.12. 2019 – příklady

Diferenciální rovnice – úvod

Co je "diferenciální rovnice":

1) rovnice pro neznámou funkci (nové!);
2) diferenciální rovnice vyjadřuje vztah mezi funkcí (kterou je vyjádřena „zkoumaná" veličina a rychlostí jejích změny, případně zrychlením;

Pokud označme hledanou funkci $y = y(x)$, pak rovnice je dána vztah mezi hodnotami funkce $y(x)$ (y-hodnotami veličiny) a $y'(x)$, případně $y''(x)$ nebo i derivacemi vyšších řádů.

Diferenciální rovnice pro funkci jedné proměnné $y(x)$, kde je „jen" první derivace $y'(x)$ hledané funkce –

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu:

obecné $\qquad F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x \in (a, b)$

speciální $\qquad y'(x) = F(x, y(x)), \quad x \in (a, b)$

Příklady diferenciálních rovnic („známých")

1) **2. Newtonův pohybový zákon pro konstantní sílu F:**

$$\frac{d}{dt}(m v(t)) = F \quad \text{, je-li } m \text{ konstantní, pak } m \cdot \frac{dv}{dt} = F;$$

(m – hmotnost, $v(t)$ rychlost pohybu)

$t \in \langle 0, t_0 \rangle$ (zpravidla) (nebo $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$);

známe-li $v(0) = v_0$ (tzv. počáteční podmínku), pak řešení je $\quad \underline{v(t) = \frac{F}{m} t + v_0} \quad , t \in \langle 0, t_0 \rangle$

2) <u>Rovnice radioaktivního rozpadu</u> (už byla zmíněna v úvodu k integrálnímu počtu)

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha\, y(t)$$

$$y(0) = y_0$$

$$(\ t \in \langle 0, T\rangle\ )$$

($y(t)$ je množství radioaktivní látky v čase t, $\alpha > 0$ je konstanta, charakteristická pro danou látku)

3) <u>Podobně růst populace (za ideálních podmínek)</u>:

$$\frac{dm}{dt} = k\, m(t)\ ,\quad k > 0,\ t \geq t_0,\quad m(t_0) = m_0 \text{ (počáteční podmínka)}$$

4) <u>V chemii</u>:

a) <u>monomolekulární reakce</u>:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x(t))\ ,\quad x(0) = 0\ ,\ \text{kde}$$

$x = x(t)$ je koncentrace látky vznikající, $a > 0$ je koncentrace původní látky v čase $t = 0$, $k > 0$ konstanta.

b) <u>bimolekulární reakce</u>:

$$\frac{dx}{dt} = k\,(a - x(t)) \cdot (b - x(t))\ ,\quad x(0) = 0$$

$x = x(t)$ koncentrace vznikající látky v čase t, $a > 0$ – počáteční koncentrace látky A, $b > 0$ – počáteční koncentrace látky B, $k > 0$ – rychlostní konstanta.

5) <u>Vytékání vody z nádoby</u> (válcové s kruhovým otvorem ve dně)

$h(t)$ značí výšku hladiny vody v čase t, $h(0) = H$

R – poloměr válcové nádoby, r – poloměr kruhového otvoru,

g – gravitační zrychlení

$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\right)\sqrt{h}, \quad h(0) = H, \quad t \geqq 0$$
$$(h(t) \geqq 0)$$

6) <u>Newtonův ochlazovací zákon</u>

$T(t)$ – teplota, T_0 – počáteční teplota tělesa,

T_v – teplota okolního prostředí (vzduchu, lázně apod.)

$T_v < T_0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k\,(T(t) - T_v), & k > 0 \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

7) <u>Usazování částice hmotnosti m v emulzi</u>

(2. Newtonův pohybový zákon)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,(m \cdot v(t)) = mg - k\,v(t), & k > 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

(odpor prostředí je přímo úměrný rychlosti pohybu částice (při malých rychlostech))

8) <u>Ředění roztoku</u>:

v čase $t = 0$ je ve V litrech roztoku x_0 rozpuštěné látky; ředí se – přitéká destilovaná voda rychlostí v l/sec $= v_p$, odtéká roztok stejnou rychlostí; je-li $x(t)$ množství rozpuštěné látky, v čase $t > 0$, je rovnice „ředění“:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v}{V}\,x(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geqq 0$$

Jak se diferenciální rovnice řeší? Obecně je to složitý problém, pokusme se najít cesta k řešení u „lehčích" diferenciálních rovnic – „podobně" asi integrování.

Je-li dána diferenciální rovnice $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, pak řešením je taková funkce $y = y(x)$, která je def. na nějakém intervalu (a, b), má zde derivaci $y'(x)$ a pro pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

<u>Pokusme se najít řešení diferenciální rovnice</u>

(1) $\underline{y'(t) = -\alpha y(t)}$, $t \in R$

1) vidíme, že $y(t) \equiv 0$, $t \in R$ je řešení (konstantní, nebo též stacionární)

2) z „tabulky derivací" najdeme, že též $y(t) = e^{-\alpha t}$, $t \in R$ je řešením rovnice (1)

3) jsou ještě další řešení?
„jako u integrování" – $y(t) = e^{-\alpha t} + c$, $c \in R$?
<u>ne</u>: $(e^{-\alpha t} + c)' = -\alpha e^{-\alpha t} \neq -\alpha(e^{-\alpha t} + c)$
ale $y(t) = c e^{-\alpha t}$, $c \in R$ už jsou řešení:
$$y'(t) = (ce^{-\alpha t})' = c(-\alpha)e^{-\alpha t} = -\alpha y(t), \; t \in R$$

4) ale nejsou ještě další řešení, která jsme „nenašli"?

Tedy hledáme odpověď na otázku:

Nechť $y(t)$ je řešení rovnice $y'(t) = -\alpha y(t)$, $t \in R$, existuje pak $c \in R$ tak, že $y(t) = c\, e^{-\alpha t}$, $t \in R$?

Je-li $y'(t) = -\alpha y(t)$, $t \in R$, pak, můžeme-li integrovat, máme

$$y(t) + c = -\alpha \int y(t)\,dt$$

(totiž je t.zv. integrální rovnice, odkud se dokazují věty o existenci řešení v teorii diferenciálních rovnic), ale odtud asi řešení nedostaneme.

<u>Klasicky jinak:</u> $$y'(t) = -\alpha y(t) \qquad (1)$$

pokud $y(t) \neq 0$ v R, rovnici upravme: $$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\alpha$$

a pak snadno (1VS) $$\int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int -\alpha\,dt$$

tedy $$\ln|y(t)| = -\alpha t + c, \quad t \in R$$

a $$|y(t)| = e^{-\alpha t + c} \quad (= e^{c} \cdot e^{-\alpha t})$$

Protože $y(t)$ je spojitá funkce v intervalu, tedy je řešením (má $y'(t)$), a je $y(t) \neq 0$ v tomto intervalu, je tedy buď $y(t) > 0$ nebo $y(t) < 0$ pro v. t v uvažovaném intervalu, zde v R, pak je

buď $y(t) > 0$ v R, a tedy $y(t) = e^{c} \cdot e^{-\alpha t}$, $t \in R$

nebo $y(t) < 0$ v R, a tedy $y(t) = -e^{c} \cdot e^{-\alpha t}$, $t \in R$.

Výsledek lze formulovat:

$$\underline{y(t) = K e^{-\alpha t}, \ K \neq 0, \ t \in R}$$

(což jsme chtěli ukázat)

Tedy máme výsledek (přidáme-li ještě stacionární řešení):
všechna řešení rovnice $y'(t) = -\alpha y(t)$, $\alpha > 0$ jsou tvaru

$$\underline{y(t) = K e^{-\alpha t}, \quad K \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}} \quad \ldots \quad (2)$$

– toto se nazývá „<u>obecné řešení</u>" dané diferenciální rovnice.

Pokud zadáme t.zv. počáteční podmínku: $y(t_0) = y_0$ (kde $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$) (počáteční se nazývá podmínka asi proto, že v aplikacích se často zadá „ $y(0) = y_0$ ") –
– máme t.zv. <u>počáteční úlohu pro danou diferenciální rovnici</u> (též Cauchyho úloha)

a řešení najdeme takto: dosadíme do (2) $t = t_0$ a $y(t_0) = y_0$:

$$\underline{y_0 = K e^{-\alpha t_0} \quad \Rightarrow \quad K = y_0 e^{\alpha t_0}}$$

a příslušné „počáteční" řešení

$$\underline{y_{poč}(t) = y_0 e^{-\alpha(t - t_0)}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Tedy – ke každé počáteční podmínce existuje právě jedno řešení dané Cauchyho úlohy.

Dříve, než přejdeme při řešení rovnice radioaktivního rozpadu zobecněné, zkusme „vyřešit" ještě jiné diferenciální rovnice „podobné":

Příklad 2. $\underline{y'(x) = -2x\,y(x)}$, $y(x_0) = y_0$ $(x_0 \in R, y_0 \in R)$

(zpravidla se píše $y' = -2xy$)

(i) rovnice řeší (opět) konstantní řešení $y(x) \equiv 0$, $x \in R$

(ii) nechť $y(x) \neq 0$, pak lze opět rovnici upravit:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -2x$$

a integrací (opět 1VS) dostaneme

$$\ln|y(x)| = -x^2 + c, \quad c \in R, \ x \in R$$

a $$|y(x)| = e^{-x^2} \cdot e^c$$

a analogicky jako v minulém příkladu je (odtud)

$$y(x) = K e^{-x^2}, \ K \neq 0, \ x \in R$$

a přidáme-li ještě $y(x) \equiv 0$, $x \in R$, dostáváme

<u>obecné řešení</u>: $\underline{y(x) = K e^{-x^2}, \ K \in R, \ x \in R}$

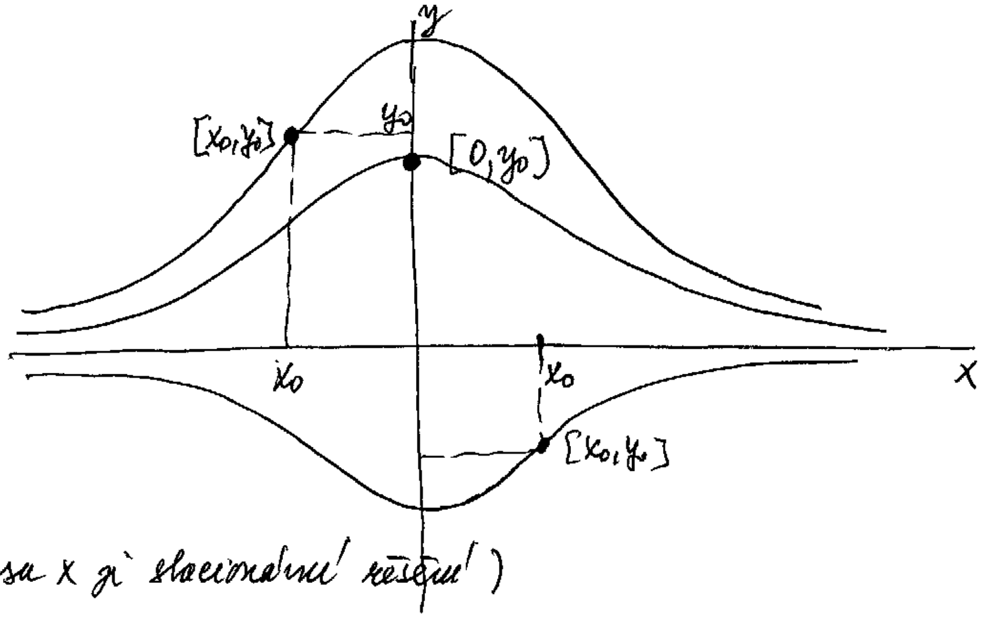
<u>řešení počáteční úlohy: $y(x_0) = y_0$</u>: – opět existuje jediné:

$$y_0 = K e^{-x_0^2} \Rightarrow K = y_0 e^{x_0^2} \text{ a}$$

$$\underline{y_{\check{r}}(x) = y_0 e^{-(x^2 - x_0^2)}, \ x \in R}$$

Zkusme si představit „graficky" řešení diferenciální rovnice: graf řešení $y(x)$ „se nazývá integrální křivka, počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$ je pak bod $[x_0, y_0]$, který leží na grafu řešení dané počáteční úlohy.

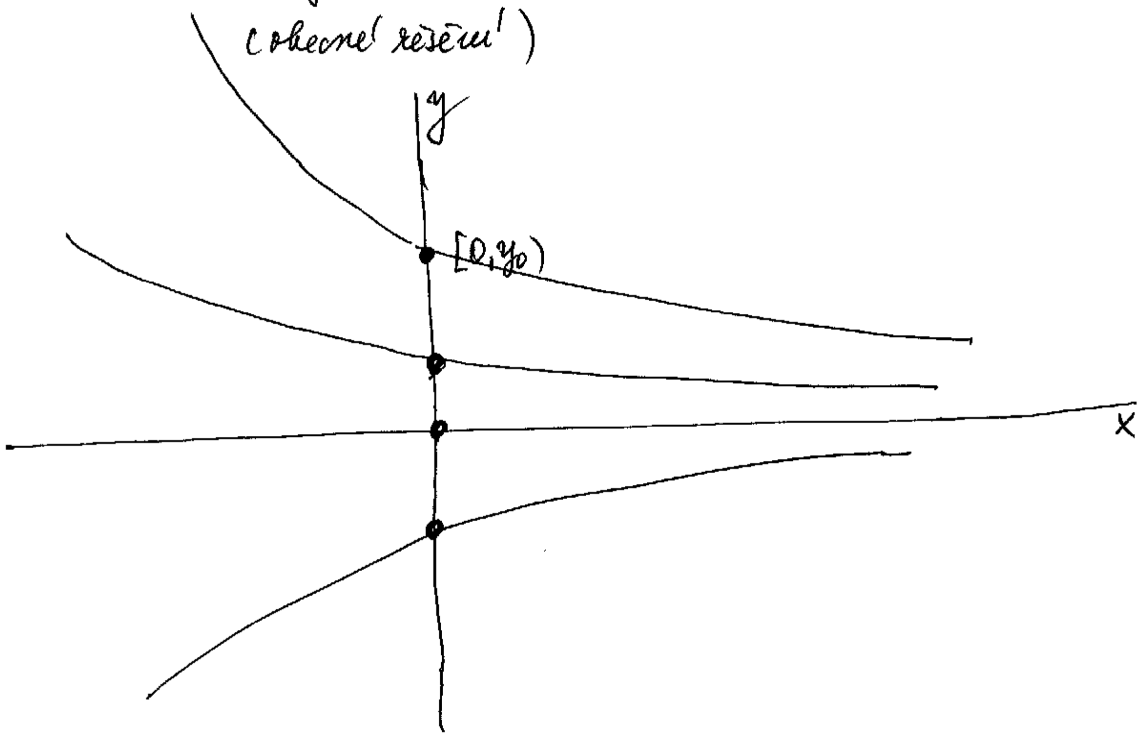
Zde:



(osa x je stacionární řešení)

Příklad 1. $y(x) = K e^{-\alpha t}$, $t \in R$, $K \in R$ $(\alpha > 0)$

(obecné řešení)



Příklad 3. $y' = -\frac{x}{y}$, zde $y(x) \neq 0$

(i) rovnice nemá stacionární řešení!

(ii) zkusme rovnici „integrovat" opět pomocí 1VS:

$$y'(x) \cdot y(x) = -x \quad ,$$

„lépe" $$2y(x) \cdot y'(x) = -2x$$

a integrací: $$\int 2y(x)\, y'(x)\, dx = \int -2x\, dx,$$

dostaneme $$y^2(x) = -x^2 + c \quad , \text{ tj.}$$

$$x^2 + y^2(x) = c \quad ! \quad (*)$$

Tedy, zde už jen $c > 0$, a pak (chceme řešení $y(x)$)

$$y^2(x) = c - x^2$$

tj. odtud pro dané $c > 0$ řešení bude definováno v intervalu $(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ (neboť i $c - x^2 > 0$) a

buď $y(x) = \sqrt{c - x^2}$, nebo $y(x) = -\sqrt{c - x^2}$, $x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$

Je-li dána počáteční podmínka $y(x_0) = y_0 \; (\neq 0)$, pak $c = x_0^2 + y_0^2$ $(*)$

a řešení je

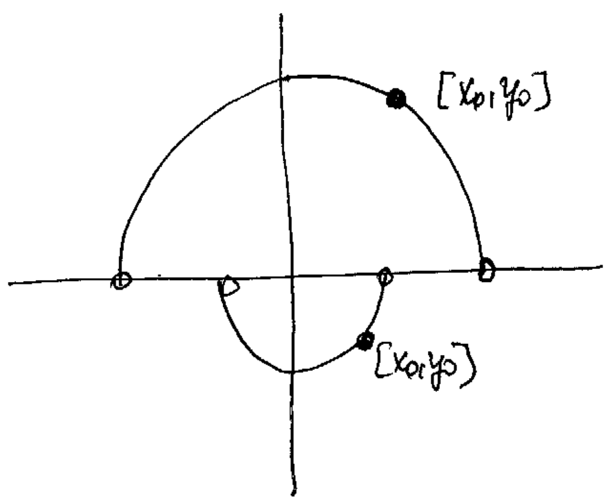
$y(x) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x}$

$(y_0 > 0)$

$y(x) = -\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x}$

$(y_0 < 0)$

$x \in (-\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$



Příklad 4 (rovnice „vytékání" vody z válcové nádoby):

$$h'(t) = -k\sqrt{h(t)}\ ,\quad k>0 \quad (h(0)=H\geq 0)\ ,\ t\geq 0$$

(i) stacionární řešení: $h(t)\equiv 0$, $t\in R$

(ii) jinak $h(t)>0$ („kvůli" $\sqrt{h(t)}$); pak opět stejná úvaha – (užití 1VS)

$$\int \frac{h'(t)}{2\sqrt{h(t)}}\,dt = -\int \frac{k}{2}\,dt$$

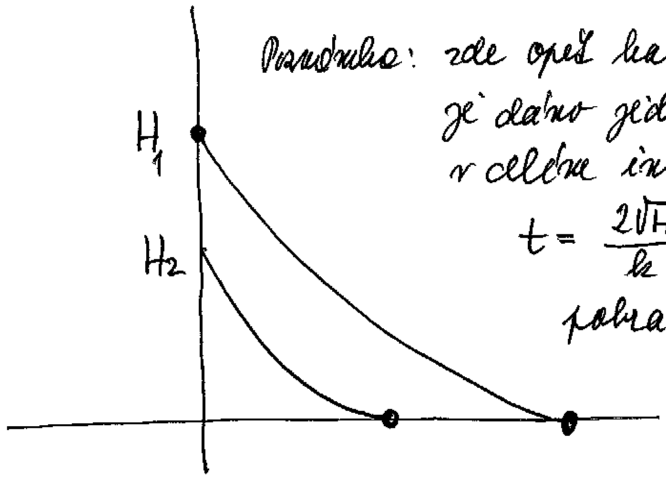
a $\quad \sqrt{h(t)} = -\frac{k}{2}\cdot t + C$

$$h(t) = \left(C - \frac{k}{2}t\right)^2 > 0,\ \text{tj.}$$

„řešení" je pro $t\in\langle 0, \frac{2C}{k}\rangle$, $C>0$.

Pro počáteční podmínku $h(0)=H$ dostaneme: $C=\sqrt{H}$, a

tedy $\quad h_{poč}(t) = \left(\sqrt{H}-\frac{k}{2}t\right)^2,\ t\in\langle 0,\frac{2\sqrt{H}}{k}\rangle$



Poznámka: zde opět každou počáteční podmínkou $H>0$ je dáno jediné řešení, ale lze řešení uvažovat v celém intervalu $t\in\langle 0,+\infty)$ – v bodě $t=\frac{2\sqrt{H}}{k}$ je řešení $y\left(\frac{2\sqrt{H}}{k}\right)=0$ a dále pokračuje už nulou (tj. „slepí" se se stacionárním řešením)

A obecně: nejprve diferenciální rovnice

$$(*) \quad y' = f(x) \cdot g(y), \quad x \in (a,b), \; y \in (c,d)$$

(diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými)

Pak platí

Věta: Je-li $f(x)$ funkce spojitá v (a,b), $g(y)$ je spojitá v (c,d) a $g(y) \neq 0$ v (c,d), pak pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, existuje právě jedno řešení rovnice $y' = f(x) \cdot g(y)$.

Důkaz (a zároveň návod, jak řešení „najít")

Je-li $y(x)$ řešení rovnice $(*)$, pak je

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)), \quad x \in (\alpha,\beta) \subset (a,b)$$

$g(y(x)) \neq 0$, lze „separovat" a integrovat (1VS):

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x)\,dx$$

Je-li $\int f(x)\,dx = F(x)$, $x \in (a,b)$, $\int \frac{1}{g(y)}\,dx = G(y)$, $y \in (c,d)$ existují (spojité funkce), dostaneme

$$G(y(x)) = F(x) + C, \quad x \in (\alpha,\beta) \subset (a,b), \; C \in R$$

a protože dále víme, že $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ v (c,d), tj. $G(y)$ je ryze monotónní v (c,d) a tedy má inverzní funkci (G^{-1}), dostaneme

$$(**) \quad y(x) = G^{-1}(F(x) + C), \quad x \in (\alpha,\beta) \subset (a,b)$$

(řešení nemusí být definováno v celém intervalu (a,b))

Obráceně se snadno dokáže, že $y(x)$ v $(**)$ řeší danou rovnici.

<u>Řešení počáteční úlohy $y(x_0) = y_0$</u> ($x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$)

$$G(y_0) = F(x_0) + C \implies \underline{C = G(y_0) - F(x_0)}$$

(tj. existuje jediné řešení počáteční úlohy).

<u>Poznámka</u>:

V aplikacích se často píše diferenciální rovnice s $y'(x) = \frac{dy}{dx}(x)$;

pak rovnice má tvar $\quad \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, $g(y) \neq 0$

a separovat se „dá" takto: $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

(používá se)

<u>Jak se pak postupuje při řešení rovnice $y' = f(x)g(y)$, $x \in (a,b)$, $y \in (c,d)$ má-li funkce $g(y)$ nulové body?</u>

1) Je-li $g(\bar{y}) = 0$, $\bar{y} \in (c,d)$, pak $\underline{y(x) = \bar{y}}$ je řešení dané rovnice, $x \in (a,b)$ – – <u>stacionární řešení</u>

2) dále řešíme rovnici v intervalech $(c, \bar{y})$ a $(\bar{y}, d)$, kde existuje ke každé počáteční podmínce jediné řešení, ale už nemusí řešení být definováno v celém (a,b) (viz příklad 3.)

3) přes stacionární řešení $y(x) = \bar{y}$ může řešení z intervalu $(c, \bar{y})$ „sklouznout" i do intervalu $(\bar{y}, d)$ (nebudeme podrobně řešit, ukážeme na příkladu příště)

Ještě shrnutí – příklad 5. (jednoduchý)

$$y' = \frac{x}{1+x^2}(1-y) \quad , \; x \in R \;, \; y \in R$$

(i) $y(x) \equiv 1, \quad x \in R$ – stacionární řešení

(ii) $y(x) \neq 1$ v R, pak můžeme „separovat":

$$\int \frac{dy}{1-y} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \qquad \text{a integrací dostaneme}$$

$$-\ln|y-1| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \qquad c \in R$$

$$\ln|y-1| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - c \qquad ((-c) \in R) = \tilde{c}$$

$$\ln|y-1| = \ln(1+x^2)^{-1/2} + \ln(e^{\tilde{c}})$$

a tedy $|y-1| = e^{\tilde{c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in R$

odstranění „absolutní" hodnoty u $|y(x)-1|$:

$y(x)-1 \neq 0$, $y(x)$ je funkce spojitá v R, tedy

buď $y(x)-1 > 0$ v R, a $y(x) = 1 + e^{\tilde{c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \; x \in R$

pak $|y(x)-1| = y(x)-1$

nebo $y(x)-1 < 0$ v R a

$|y(x)-1| = -(y(x)-1)$ a $y(x) = 1 - e^{\tilde{c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \; x \in R$

tedy, řešení je

$$\begin{cases} y(x) = 1 + \dfrac{K}{\sqrt{1+x^2}}, \; K \neq 0 \; (K = e^{\tilde{c}}, K = -e^{\tilde{c}}) \; x \in R \\ \text{a} \; y(x) \equiv 1, \; x \in R \; \text{(stacionární řešení)} \end{cases}$$

Řešení obecné lze pak napsat „jednou" formulí:

$$\underline{y_{OR}(x) = 1 + \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}, \; k \in R, \; x \in R}$$

<u>Řešení počáteční úlohy:</u>

a) $y(0) = 2$: $\quad 2 = 1 + k \Rightarrow k = 1$

1. $y_{poč}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \; x \in R$

b) $y(3) = 1$ ~ jen stacionární řešení:

$\underline{y(x) \equiv 1, \; x \in R}$